

# RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统构建与性能分析

张顺外, 王金

(南京邮电大学通信与信息工程学院, 江苏 南京 210003)

**摘要:** 为实现极其可靠信息传输, 针对融合可重构智能表面 (RIS) 技术与编码中继协作技术系统展开研究, 建立了 RIS 辅助的低密度奇偶校验 (LDPC) 乘积码编码中继协作系统模型; 利用 LDPC 乘积码, 信源节点对信息矩阵行编码, 中继节点对信息矩阵列编码; 提出了一种高效联合迭代译码算法, 目的节点对接收的两路信号分别进行 LDPC 行译码与 LDPC 列译码, 并迭代更新信息位的对数似然比, 再判决输出。理论推导了所提系统的中断概率以及有限码长信道容量的闭合解。理论分析与仿真结果表明, 所提系统性能明显优于传统编码中继协作系统, 而且随着 RIS 反射单元数量增加, 优势变得更明显; 随着 LDPC 乘积码码长增加, 所提系统的有限码长信道容量逐渐逼近理想信道容量。

**关键词:** RIS; LDPC 乘积码; 编码中继协作; 中断概率; 有限码长信道容量

**中图分类号:** TN911

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.11959/j.issn.1000-436x.2023212

## Establishment and performance analysis of RIS-assisted coded relay cooperation system based on LDPC product codes

ZHANG Shunwai, WANG Jin

College of Telecommunications and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China

**Abstract:** To pursue the ultra-reliable information transmission, the system which combined the reconfigurable intelligent surface (RIS) technology and coded relay cooperation technology was investigated. The RIS-assisted coded relay cooperation system model based on low density parity check (LDPC) product codes was established. Based on LDPC product codes, the information matrix was row-encoded by the source node and column-encoded by the relay node, respectively. An efficient joint iterative decoding algorithm was proposed. The two received signals at the destination were row-decoded and column-decoded iteratively to update the logarithmic likelihood ratios of information bits, and then the decoding decision was made. The closed-form solutions of the outage probability and the channel capacity with finite codelength were theoretically derived. Theoretical analysis and simulation results show that the proposed system obviously outperforms the traditional coded relay cooperation. The more number of RIS elements, the more significant advantage can be obtained. Simulation results also demonstrate that the channel capacity with finite codelength approaches the ideal channel capacity with the codelength of LDPC product codes increasing.

**Keywords:** RIS, LDPC product code, coded relay cooperation, outage probability, channel capacity with finite codelength

收稿日期: 2023-08-18; 修回日期: 2023-10-18

基金项目: 江苏省高等学校自然科学研究基金资助项目 (No.20KJB510034); 宽带无线通信与传感网技术教育部重点实验室开放研究基金资助项目 (No.JZNY202112)

**Foundation Items:** The Natural Science Foundation of Jiangsu Higher Education Institutions (No.20KJB510034), The Open Research Fund of Key Lab of Broadband Wireless Communication and Sensor Network Technology, Ministry of Education (No.JZNY202112)

## 0 引言

无线信道一直被视为无线通信系统中的不可调控部分,随着超材料技术的快速发展,近年来提出的可重构智能表面(RIS, reconfigurable intelligent surface)因其具有调控无线信道的能力,引起无线通信领域的广泛关注。与现有的传统中继技术不同,RIS 在不需要额外发送功率和复杂信号处理情况下可提高无线通信质量,研究表明,RIS 可有效提高扩展通信覆盖范围和误码率(BER, bit error rate)性能。文献[1]建立了瑞利衰落信道下 RIS 辅助无线系统的一般数学框架,推导出理论符号错误率(SER, symbol error rate)上界,结果表明 RIS 辅助无线通信系统接收信噪比得到显著提高。在此基础上,文献[2]进一步对瑞利衰落信道下 RIS 辅助无线通信系统的级联衰落信道进行了统计表征,推导了精确理论 SER 和中断概率闭式解。文献[3]分析了 RIS 辅助无线通信系统在瑞利衰落信道下的覆盖范围,结果表明,使用 RIS 可扩大覆盖范围,增加信噪比增益,减少链路时延。文献[4]研究了 RIS 位置对蜂窝网络覆盖影响,通过优化基站和 RIS 之间水平与垂直距离,可进一步最大化小区覆盖。

中继协作技术<sup>[5-6]</sup>是在中继信道和多址接入信道基础上,受多输入多输出(MIMO, multiple-input multiple-output)技术启发而提出的,使单天线用户之间通过相互协作共享彼此的天线,形成虚拟 MIMO 系统,实现空间分集增益,从而提高系统性能。编码协作<sup>[7]</sup>结合信道编码技术与中继协作技术,是实现可靠通信的最有效途径之一。

鉴于 RIS 与中继功能类似,诸多学者对两者展开了比较与分析。文献[2]研究表明,RIS 辅助系统在平均信噪比、中断概率、符号错误率和遍历容量方面均优于理想放大-转发(AF, amplify-and-forward)中继系统;文献[8]研究表明,与 AF 中继系统相比,RIS 辅助系统可极大提高系统能量效率。文献[9]将 RIS 技术与解码-转发(DF, decode-and-forward)中继进行比较,结果显示,当单元数量较少时,RIS 辅助系统性能不及 DF 中继系统,但是随着 RIS 单元数量增加,RIS 辅助系统的性能逐渐优于 DF 中继系统。为充分利用 RIS 与中继两者的优势,文献[10]将中继与 RIS 技术结合起来,提出了新型的混合中继和 RIS 辅助系统,

证明在发射功率和反射单元数量受限情况下,增加一个简单 DF 中继可显著提高 RIS 辅助系统性能。文献[11]提出了 RIS 辅助的双向 AF 中继系统,利用一个 AF 中继和 2 个 RIS 来协助 2 个终端用户之间的双向数据传输,与无 RIS 的中继系统相比,所提系统性能得到显著提高。文献[12]提出一种通过无人机(UAV, unmanned aerial vehicle)搭载 RIS 辅助 AF 中继协作方案,UAV 在空中作为一个移动 RIS,为地面 AF 中继协作提供额外的反射链路,可有效提升 AF 中继协作系统性能。文献[13]提出一种 RIS 辅助的 DF 中继协作 MIMO 系统,考虑不完美 CSI 情形,在最大总发射功率和最小目标速率约束下,对预编码矩阵和 RIS 被动波束成形进行了联合鲁棒设计,进一步验证了 RIS 可以显著提高中继协作系统能量效率。

低密度奇偶校验(LDPC, low density parity check)码是一种性能逼近香农限、可支持高吞吐量和低时延通信的高效信道编码技术,已被 5G<sup>[14]</sup>标准所采用。文献[15]结合 RIS 技术和 LDPC 码,研究了采用 LDPC 编码的 RIS 辅助无线通信系统性能,并推导出系统 BER 的上界与下界。为解决 LDPC 码长较长时编码复杂度过高的问题,文献[16]提出一种基于迭代的 LDPC 乘积码,信息矩阵行列方向均采用 LDPC 码编码,并证明在有随机错误和突发错误时,该码能获得比简单非迭代 LDPC 乘积码更优异的性能。文献[17]使用高码率的 RS(Reed-Solomon)码作为 LDPC 乘积码的外部码,并通过外部码和内部码之间迭代以提高乘积码性能。文献[18-19]提出一种隐式部分 LDPC 乘积码,信息矩阵受 LDPC 码逐行保护,同时部分信息矩阵受到卷积码或 BCH(Bose-Chaudhuri-Hocquenghem)码逐列保护。

在上述研究的基础上,鉴于 RIS 的低成本、低功耗、智能可重构、部署灵活等优点以及传统中继的稳定可靠性、已广泛部署等特点,本文针对 RIS 技术与中继技术混合系统展开研究。与已有工作(如文献[10-13])将 RIS 技术与 AF 中继或 DF 中继结合不同,考虑到编码中继的超可靠性,本文将 RIS 技术与编码中继结合,提出 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统。该系统充分发掘了 RIS 技术与编码中继的优势,可实现极其可靠的通信;特别地,系统采用 LDPC 乘积码在获得高编码增益的同时,降低了编码复杂度。本文主要贡献概述

如下: 首先, 建立 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统模型, RIS 与中继同时协助信息传输; 其次, 系统采用 LDPC 乘积码编码, 并提出了高效的 LDPC 乘积码联合迭代译码算法; 然后, 理论分析了系统中断概率, 并推导出有限码长下系统信道容量; 最后, 通过仿真验证所提系统与算法的性能。

### 1 系统模型

RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统模型如图 1 所示, 系统由信源节点(S)、中继节点(R)、RIS (I)、目的节点 (D) 构成。

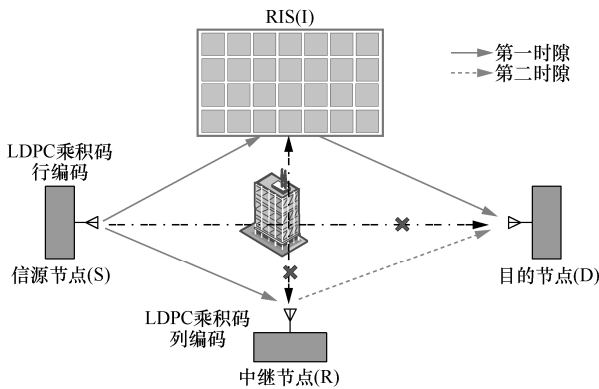


图 1 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统模型

信源节点 S 对信号进行 LDPC 乘积码行编码并发送信号, 中继节点 R 接收直达的行编码信号, 先译码, 再对译码后的信息位进行列编码并发送信号。其中, RIS 具有  $M$  个反射单元, 信源节点 S、中继节点 R 和目的节点 D 均配置单天线。系统工作在半双工方式, 第一时隙中继节点 R 接收信源节点 S 发送的直达信号, 目的节点 D 接收 RIS 反射的信源节点 S 发送的信号; 第二时隙目的节点 D 接收中继节点 R 发送的直达信号。

假设信源节点 S 和 RIS 第  $m$  个反射单元之间信道为  $h_{SI}^{(m)} = d_{SI}^{-\frac{\alpha}{2}} |h_{SI}^{(m)}| e^{-j\phi_{SI}^{(m)}}$ , 其中,  $d_{SI}^{-\frac{\alpha}{2}}$  表示 S 和 I 之间的路径损耗,  $d_{SI}$  表示 S 和 I 之间的距离,  $\alpha$  表示路径损耗指数,  $|h_{SI}^{(m)}|$  和  $\phi_{SI}^{(m)}$  分别表示信道系数  $h_{SI}^{(m)}$  的振幅和相位。同理, RIS 第  $m$  个反射单元与目的节点 D 之间反射信道为  $h_{ID}^{(m)} = d_{ID}^{-\frac{\alpha}{2}} |h_{ID}^{(m)}| e^{-j\phi_{ID}^{(m)}}$ , 信源节点 S 与中继节点 R 之间信道为  $h_{SR} = d_{SR}^{-\frac{\alpha}{2}} |h_{SR}| e^{-j\phi_{SR}}$ , 中继节点 R 与目的节点 D 之

间信道为  $h_{RD} = d_{RD}^{-\frac{\alpha}{2}} |h_{RD}| e^{-j\phi_{RD}}$ 。所有信道均为瑞利衰落信道。

### 2 LDPC 乘积码编译码实现

本节首先介绍 LDPC 乘积码编码以及编码信号的传输, 然后设计对应的 LDPC 乘积码联合迭代译码算法。

#### 2.1 LDPC 乘积码编码与传输

RIS 辅助的编码中继协作系统的 LDPC 乘积码编码过程如图 2 所示。

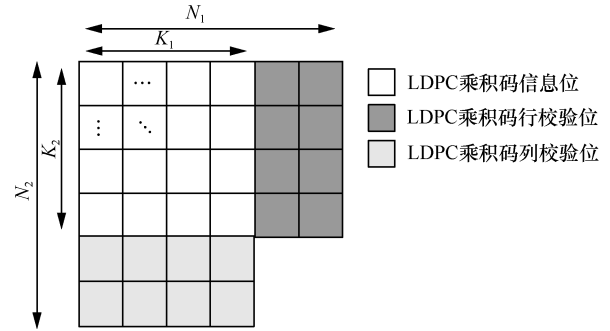


图 2 RIS 辅助的编码中继协作系统的 LDPC 乘积码编码过程

假设信源节点 S 传输一个  $K_2 \times K_1$  的信息矩阵

$$s = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,K_1} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,K_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{K_2,1} & s_{K_2,2} & \cdots & s_{K_2,K_1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, 信息矩阵  $s$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素  $s_{i,j} \in \{0,1\}$ , 信源节点 S 使用校验矩阵  $H_{K_1 \times N_1}^{(1)}$  对信息矩阵  $s$  逐行编码得到行编码码字矩阵

$$c_1 = [s \quad p_1] = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,K_1} & p_{1,1}^{(1)} & p_{1,2}^{(1)} & \cdots & p_{1,(N_1-K_1)}^{(1)} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,K_1} & p_{2,1}^{(1)} & p_{2,2}^{(1)} & \cdots & p_{2,(N_1-K_1)}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{K_2,1} & s_{K_2,2} & \cdots & s_{K_2,K_1} & p_{K_2,1}^{(1)} & p_{K_2,2}^{(1)} & \cdots & p_{K_2,(N_1-K_1)}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

对码字矩阵  $c_1$  采用二进制相移键控 (BPSK, binary phase shift keying) 调制, 信源节点 S 发送调制信号  $x_1$ 。

中继节点 R 对接收到的信号  $\hat{x}_1$  译码得到  $\hat{c}_1 = [\hat{s} \quad \hat{p}_1]$ , 再使用校验矩阵  $H_{K_2 \times N_2}^{(c)}$  对译码后的信息矩阵  $\hat{s}$  逐列编码, 得到列编码码字矩阵

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s}_{1,1} & \hat{s}_{1,2} & \cdots & \hat{s}_{1,K_1} \\ \hat{s}_{2,1} & \hat{s}_{2,2} & \cdots & \hat{s}_{2,K_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{s}_{K_2,1} & \hat{s}_{K_2,2} & \cdots & \hat{s}_{K_2,K_1} \\ p_{1,1}^{(2)} & p_{1,2}^{(2)} & \cdots & p_{1,K_1}^{(2)} \\ p_{2,1}^{(2)} & p_{2,2}^{(2)} & \cdots & p_{2,K_1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{(N_2-K_2),1}^{(2)} & p_{(N_2-K_2),2}^{(2)} & \cdots & p_{(N_2-K_2),K_1}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

中继节点 R 发送  $\mathbf{p}_2$  经 BPSK 调制后得到的信号  $\mathbf{x}_2$ 。

第一时隙的中继节点 R 接收到来自信源节点 S 的信号为

$$\mathbf{y}_R = \sqrt{P_S} h_{SR} \mathbf{x}_1 + \mathbf{w}_0 \quad (4)$$

其中,  $P_S$  表示信源节点 S 的发送功率,  $\mathbf{w}_0$  表示均值为 0、方差为  $\sigma_0^2$  的加性白高斯噪声 (AWGN, additive white Gaussian noise), 即  $w_0(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_0^2)$ 。

第一时隙的目的节点 D 接收到 RIS 的反射信号为

$$\mathbf{y}_1 = \sqrt{P_S} \sum_{m=1}^M \eta^{(m)} h_{SI}^{(m)} h_{ID}^{(m)} \mathbf{x}_1 + \mathbf{w}_1 \quad (5)$$

其中,  $\eta^{(m)} = |\eta^{(m)}| e^{j\theta^{(m)}}$  表示第  $m$  个反射单元的反射系数,  $|\eta^{(m)}|$  为反射增益,  $\theta^{(m)}$  为反射单元相移, 不失一般性, 本文假设反射增益  $|\eta^{(m)}| = 1, \forall m = 1, \dots, M$ ;  $\mathbf{w}_1$  为 AWGN, 且  $w_1(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_1^2)$ 。

目的节点 D 接收 RIS 反射信号的瞬时信噪比可以表示为

$$\gamma_1 = \frac{P_S}{\sigma_1^2} \left| \sum_{m=1}^M |h_{SI}^{(m)}| |h_{ID}^{(m)}| e^{j(\theta^{(m)} - \phi_{SI}^{(m)} - \phi_{ID}^{(m)})} \right|^2 \quad (6)$$

为使目的节点 D 接收到 RIS 反射信号的信噪比  $\gamma_1$  最大, 即选择 RIS 最佳相移

$$\theta^{(m)} = \phi_{SI}^{(m)} + \phi_{ID}^{(m)}, \quad \forall m = 1, \dots, M \quad (7)$$

此时, 进一步得到目的节点 D 接收 RIS 反射信号的信噪比为

$$\gamma_1 = \frac{P_S}{\sigma_1^2} \left| \sum_{m=1}^M |h_{SI}^{(m)}| |h_{ID}^{(m)}| \right|^2 = \frac{P_S A^2}{\sigma_1^2} \quad (8)$$

其中,  $A = \sum_{m=1}^M |h_{SI}^{(m)}| |h_{ID}^{(m)}|$ 。

第二时隙的目的节点 D 接收到中继节点 R 的直达信号为

$$\mathbf{y}_2 = \sqrt{P_R} h_{RD} \mathbf{x}_2 + \mathbf{w}_2 \quad (9)$$

其中,  $P_R$  表示中继节点 R 的发送功率,  $\mathbf{w}_2$  为 AWGN, 且  $w_2(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_2^2)$ 。目的节点 D 接收到中继节点 R 直达信号的信噪比为

$$\gamma_2 = \frac{P_R |h_{RD}|^2}{\sigma_2^2} \quad (10)$$

## 2.2 LDPC 乘积码译码

针对 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统, 提出一种联合迭代译码算法, 译码流程如图 3 所示。首先, 目的节点 D 提取信号  $\mathbf{y}_1$  的信息位转置  $\mathbf{y}_{1,s}^T$ , 并与接收信号  $\mathbf{y}_2$  组合, 得到  $\hat{\mathbf{y}}_2$ , 采用最小和 (MS, min-sum) 译码算法分别对  $\mathbf{y}_1$  和  $\hat{\mathbf{y}}_2$  行译码和列译码, 得到相应的对数似然比 (LLR, log likelihood ratio) [20]; 然后, 将行译码得到的信息位 LLR 与上一步列译码更新后的校验位 LLR 组合, 进行一次列译码; 接着, 将得到的更新后信息位 LLR 与上一步行译码得到的校验位 LLR 组合, 进行一次行译码更新信息位 LLR; 迭代执行行列译码更新信息位 LLR; 最后, 进行软判决。具体联合迭代译码实现如算法 1 所示。

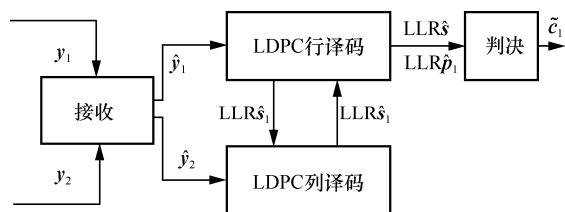


图 3 LDPC 乘积码译码流程

### 算法 1 LDPC 乘积码联合迭代译码算法

- 1) 将  $\mathbf{y}_1$  的信息位转置, 并与  $\mathbf{y}_2$  组合得到  $\hat{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,s}^T \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}$ , 对于  $\mathbf{y}_1$  和  $\hat{\mathbf{y}}_2$ , 计算初始化 LLR, 分别得到信息位和校验位对数似然比  $\text{LLR}\hat{\mathbf{s}}_1^{(0)}$ 、 $\text{LLR}\hat{\mathbf{s}}_2^{(0)}$  和  $\text{LLR}\hat{\mathbf{p}}_1^{(0)}$ 、 $\text{LLR}\hat{\mathbf{p}}_2^{(0)}$ 。
- 2) for  $i = 1 : \text{iter}_{\max}$
- 3) 将行译码得到的  $\text{LLR}\hat{\mathbf{s}}_1^{(i-1)}$  转置与列译码得到的  $\text{LLR}\hat{\mathbf{p}}_2^{(i-1)}$  组合得到  $\begin{bmatrix} (\text{LLR}\hat{\mathbf{s}}_1^{(i-1)})^T \\ \text{LLR}\hat{\mathbf{p}}_2^{(i-1)} \end{bmatrix}$ , 然后列译码, 更新  $\text{LLR}\hat{\mathbf{s}}_2^{(i)}$  和  $\text{LLR}\hat{\mathbf{p}}_2^{(i)}$ 。
- 4) 将步骤 3) 得到的  $\text{LLR}\hat{\mathbf{s}}_2^{(i)}$  转置并与  $\text{LLR}\hat{\mathbf{p}}_1^{(i-1)}$

组合得到  $\left[ \left( \text{LLR} \hat{s}_2^{(i)} \right)^\top \text{LLR} \hat{p}_1^{(i-1)} \right]$ , 然后行译码, 更新  $\text{LLR} \hat{s}_1^{(i)}$  和  $\text{LLR} \hat{p}_1^{(i)}$ 。

5) end for

6) 迭代结束, 组合  $\text{LLR} \hat{s}_1^{(\text{iter}_{\max})}$  和  $\text{LLR} \hat{p}_1^{(\text{iter}_{\max})}$ , 进行软判决, 得到码字  $\tilde{c}_1 = [\tilde{s} \quad \tilde{p}_1]$ 。

### 3 系统性能理论分析

本节分析 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统中断概率和有限码长下的信道容量。

#### 3.1 中断概率分析

目的节点 D 接收到的联合码字分别来自 S-I-D 和 R-D 信道, 其中  $K_2 \times N_1$  位来自 S-I-D 信道,  $K_1 \times (N_2 - K_2)$  位来自 R-D 信道。理想协作下, 所提系统的瞬时信道容量<sup>[20]</sup>表示为

$$C = \frac{K_2 \times N_1}{K_1 \times N_2 + K_2 \times N_1 - K_1 \times K_2} \text{lb}(1 + \gamma_1) + \frac{(N_2 - K_2) \times K_1}{K_1 \times N_2 + K_2 \times N_1 - K_1 \times K_2} \text{lb}(1 + \gamma_2) \quad (11)$$

其中,  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  为来自 S-I-D 和 R-D 信道接收信号的信噪比, 分别由式(8)和式(10)可得。所提系统的中断概率定义为

$$P_{\text{out}} = \Pr\{C < r\} \quad (12)$$

其中,  $r = \frac{K_1 \times K_2}{K_1 \times N_2 + K_2 \times N_1 - K_1 \times K_2}$  为编码协作系统的等效码率。

为方便推导, 定义

$$a = \frac{K_2 \times N_1}{K_1 \times N_2 + K_2 \times N_1 - K_1 \times K_2} \quad (13)$$

$$b = \frac{(N_2 - K_2) \times K_1}{K_1 \times N_2 + K_2 \times N_1 - K_1 \times K_2} \quad (14)$$

$$t_1 = \frac{P_S}{\sigma_1^2}, t_2 = \frac{P_R}{\sigma_2^2} \quad (15)$$

$$X_1 = A^2, X_2 = |h_{\text{RD}}|^2 \quad (16)$$

则式(11)可改写为

$$Z = Y_1 + Y_2 \quad (17)$$

其中,  $Y_1 = a \text{lb}(1 + t_1 X_1)$ ,  $Y_2 = b \text{lb}(1 + t_2 X_2)$ 。

为推导 Z 的概率密度, 首先, 根据文献[2], 可知 A 概率密度函数为

$$f_A(x) = \frac{x^\lambda}{\sigma^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1)} \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) \quad (18)$$

其中,  $\lambda = \frac{M\pi^2}{16 - \pi^2} - 1$ ,  $\sigma = \frac{16 - \pi^2}{4\pi}$ ,  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma

函数。为进一步得到  $X_1 = A^2$  的概率密度函数, 给出引理 1<sup>[20]</sup>。

**引理 1** 假设  $y = g(x)$ , 若 x 的概率密度函数为  $f_X(x)$ , 则 y 的概率密度函数  $f_Y(y)$  可表示为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)|, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $x = h(y)$  是  $y = g(x)$  的反函数,  $|h'(y)|$  是  $h(y)$  导数的绝对值。

根据引理 1, 得到  $X_1 = A^2$  的概率密度函数为

$$f_{X_1}(x) = \frac{x^{\frac{\lambda-1}{2}}}{2\sigma^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1)} \exp\left(-\frac{\sqrt{x}}{\sigma}\right) \quad (20)$$

同理, 得到  $X_2$  的概率密度函数为

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

求得  $Y_1 = g(x_1) = a \text{lb}(1 + t_1 X_1)$  和  $Y_2 = g(x_2) = b \text{lb}(1 + t_2 X_2)$

的概率密度函数分别为

$$f_{Y_1}(y) = \begin{cases} \frac{\ln 2}{at_1} \frac{2^{\frac{y}{a}} \left( \frac{2^{\frac{y}{a}} - 1}{t_1} \right)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{2\sigma^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1)} \exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{2^{\frac{y}{a}} - 1}{t_1}}}{\sigma}\right), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$f_{Y_2}(y) = \begin{cases} \frac{\ln 2}{bt_2} 2^{\frac{y}{b}} \exp\left(-\frac{2^{\frac{y}{b}} - 1}{t_2}\right), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad (23)$$

由于  $Y_1$  和  $Y_2$  相互独立, 进一步得到  $Z = Y_1 + Y_2$  的概率密度函数为

$$f_Z(z) = f_{Y_1} f_{Y_2}(z) = \int_0^z f_{Y_1}(y) f_{Y_2}(z-y) dy = \frac{(\ln 2)^2}{2abt_1 t_2 \sigma^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1)} \int_0^z 2^{\frac{y}{a} + \frac{z-y}{b}} \left( \frac{2^{\frac{y}{a}} - 1}{t_1} \right)^{\frac{\lambda-1}{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{2^{\frac{y}{a}} - 1}{t_1}}}{\sigma} - \frac{2^{\frac{z-y}{b}} - 1}{t_2}\right) dy \quad (24)$$

最终，得到所提系统中断概率理论值为

$$P_{\text{out}} = P(Z < r) = \int_{-\infty}^r f_Z(z) dz = \frac{(\ln 2)^2}{2abt_1t_2\sigma^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)} \int_0^r \int_0^z 2^{\frac{y+z-y}{b}} \left( \frac{2^{\frac{y}{a}} - 1}{t_1} \right)^{\frac{\lambda-1}{2}} \exp \left( -\frac{\sqrt{\frac{2^{\frac{y}{a}} - 1}{t_1}}}{\sigma} - \frac{z-y}{t_2} - 1 \right) dy dz \quad (25)$$

其中，定积分的计算可采用 MATLAB 中的 int 函数。

### 3.2 有限码长信道容量分析

信道容量通常在无限码长情况下得到，而实际通信系统中码长是有限的，本节在码长有限情况下分析系统遍历信道容量。文献[21]给出了有限码长信道容量的一般近似解

$$\tilde{C} = \frac{1}{n} \text{lb} M^*(n, \varepsilon) \approx C - \sqrt{\frac{V}{n}} Q^{-1}(\varepsilon) \quad (26)$$

其中， $C$  为信道容量， $V$  为信道色散， $n$  为码长， $\varepsilon$  为误码率。

1) 高斯信道下点对点系统有限码长信道容量

文献[22]推导出了高斯信道模型下的信道容量  $C$  以及信道色散  $V$

$$C = \frac{1}{2} \text{lb}(1 + \gamma) \quad (27)$$

$$V = \frac{(\text{lbe})^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \gamma} \right)^2 \right) \quad (28)$$

其中， $\gamma$  为接收信噪比。根据式(27)，可得  $1 + \gamma = 2^{2C}$ ，则式(28)可进一步表示为

$$V = \frac{(\text{lbe})^2}{2} (1 - 2^{-4C}) \quad (29)$$

因此，高斯信道模型下点对点系统有限码长信道容量为

$$\frac{1}{n} \text{lb} M^*(n, \varepsilon) \approx C - \sqrt{\frac{1 - 2^{-4C}}{2n}} Q^{-1}(\varepsilon) \text{lbe} \quad (30)$$

2) 所提系统有限码长信道容量

针对 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系

统，无限码长的理想信道容量已在式(11)中给出，为便于推导，将其改写为

$$C = aC_1 + bC_2 \quad (31)$$

其中， $C_1 = \text{lb}(1 + \gamma_1)$ ， $C_2 = \text{lb}(1 + \gamma_2)$ 。

由式(8)可知，当 RIS 反射单元数量  $M$  足够大时， $\gamma_1 = \frac{M^2 u^2 P_s}{\sigma_1^2}$  (其中  $u$  为  $|h_{\text{SI}}^{(m)}| |h_{\text{ID}}^{(m)}|$  期望)，即  $\gamma_1$  与  $M^2$  成正比；由式(10)可知， $\gamma_2$  与  $M$  无关。根据

式(31)可得， $C = a \text{lb} \left( \frac{1 + M^2 u^2 P_s}{\sigma_1^2} \right) + bC_2$  (其中  $bC_2$  与

$M$  无关)，故信道容量  $C$  是关于  $M^2$  的对数函数。

由于  $C_1$  和  $C_2$  描述的信道相互独立，可分别得到  $C_1$  和  $C_2$  信道色散为

$$V_1 = \frac{(\text{lbe})^2}{2} (1 - 2^{-4C_1}) \quad (32)$$

$$V_2 = \frac{(\text{lbe})^2}{2} (1 - 2^{-4C_2}) \quad (33)$$

因此，在所提系统中，当总码长为  $n$ 、RIS 反射信号码长为  $n_1$ 、中继节点 R 传输信号码长为  $n_2$  时，RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统的有限码长信道容量为

$$\begin{aligned} \tilde{C} &\approx C - \sqrt{\frac{V}{n}} Q^{-1}(\varepsilon) = a\tilde{C}_1 + b\tilde{C}_2 = \\ &a \left( C_1 - \sqrt{\frac{V_1}{n_1}} Q^{-1}(\varepsilon_1) \right) + b \left( C_2 - \sqrt{\frac{V_2}{n_2}} Q^{-1}(\varepsilon_2) \right) = \\ &a \left( C_1 - \sqrt{\frac{1}{n_1} (1 - 2^{-2C_1})} Q^{-1}(\varepsilon_1) \text{lbe} \right) + \\ &b \left( C_2 - \sqrt{\frac{1}{n_2} (1 - 2^{-2C_2})} Q^{-1}(\varepsilon_2) \text{lbe} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

其中， $\varepsilon_1$  表示目的节点 D 接收 RIS 反射信号的误码率， $\varepsilon_2$  表示目的节点 D 接收中继节点 R 直达信号的误码率。在所提 LDPC 乘积码联合迭代译码下，对两路信号联合译码，即  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ，式(34)可进一步表示为

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= C - \left( a \sqrt{\frac{V_1}{n_1}} + b \sqrt{\frac{V_2}{n_2}} \right) Q^{-1}(\varepsilon) = \\ &C - \left( a \sqrt{\frac{1}{n_1} (1 - 2^{-2C_1})} + b \sqrt{\frac{1}{n_2} (1 - 2^{-2C_2})} \right) Q^{-1}(\varepsilon) \text{lbe} \end{aligned} \quad (35)$$

### 4 仿真分析

本节通过 MATLAB 仿真分析 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统的 BER、中断概率以及有限码长信道容量等性能。S-R、S-I、I-D、R-D 为相互独立的瑞利衰落信道,衰落系数服从均值为 0、方差为 1 的复高斯分布。假设  $d_{SI} = d_{ID} = d_{SR} = d_{RD} = 10\text{ m}$ ,

$$\alpha = 2^{[10]}, \text{ SNR} = \frac{P_S}{\sigma_1^2} = \frac{P_R}{\sigma_2^2}, \text{ 信息矩阵为}$$

$K_2 \times K_1 = 16 \times 16$  的矩阵。LDPC 乘积码的行列编码均采用基于生成矩阵 LDPC (G-LDPC, generator-matrix-based LDPC) 码<sup>[23]</sup>, 目的节点 D 采用联合迭代译码算法, 其中行列译码均采用 MS 译码算法<sup>[20]</sup>。中继节点 R 理想译码, 能正确译码来自信源节点 S 的信息。信源节点 S 与中继节点 R 采用的 G-LDPC 乘积码参数如表 1 所示。

表 1 系统采用的 G-LDPC 乘积码

参数	信源节点 S	中继节点 R
码率	$r_1 = \frac{1}{2}$	$r_2 = \frac{1}{2}$
码长	$K_2 \times N_1 = 16 \times 32$	$K_1 \times N_2 = 16 \times 32$

#### 4.1 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统 BER 性能

本节研究 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统和传统的编码中继协作系统的 BER 性能, 并进一步比较 RIS 反射单元数量对系统性能的影响。其中, RIS 反射单元数量  $M$  为 5、12、20, LDPC 乘积码译码迭代次数  $\text{iter}$  为 5。传统编码中继协作系统中, 目的节点 D 接收信源节点 S 的直达信号和中继节点 R 的转发信号。

图 4 比较了 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统在不同 RIS 反射单元数量时与传统中继协作系统的 BER 性能。从图 4 可以看出, 当 RIS 反射单元数量较小时, 所提系统与传统中继协作系统 BER 性能相近, 随着 RIS 反射单元数量增加, 所提系统性能明显优于传统中继协作系统。当  $\text{SNR} = 18\text{ dB}$ 、 $M = 5$  时, 所提系统性能与传统中继协作系统接近; 当  $M$  增加到 12 和 20 时, BER 则分别降低到约  $5.9 \times 10^{-2}$  和  $3.4 \times 10^{-3}$ , 性能优势明显。这是因为 RIS 反射单元数量越大, 给系统提供的辅助链路越多, 系统能获得的空间分集增益越高, 故 BER 性能显著提高。

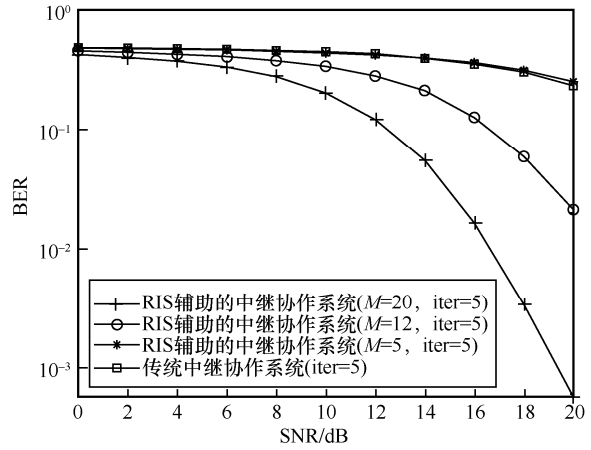


图 4 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统在不同 RIS 反射单元数量时与传统中继协作系统的 BER 性能

#### 4.2 不同迭代次数下 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统 BER 性能

本节研究 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统的译码迭代次数对系统 BER 性能影响, 其中, 译码迭代次数为 1、4、15, 反射单元数量  $M$  为 20。

图 5 比较了不同译码迭代次数下 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统 BER 性能。从图 5 可以看出, 随着迭代次数增加, 误码率降低, 并且当迭代次数较低时, 联合迭代译码算法快速达到收敛。当  $\text{SNR} = 14\text{ dB}$  时, 迭代次数为 4 和 15 的 BER 性能明显高于迭代次数为 1 的 BER 性能, 且迭代次数为 4 时已基本收敛。这是因为在联合迭代译码时, 1 次联合迭代译码实际完成了 1 次行译码和 1 次列译码, 故在迭代次数较低时能够快速收敛。

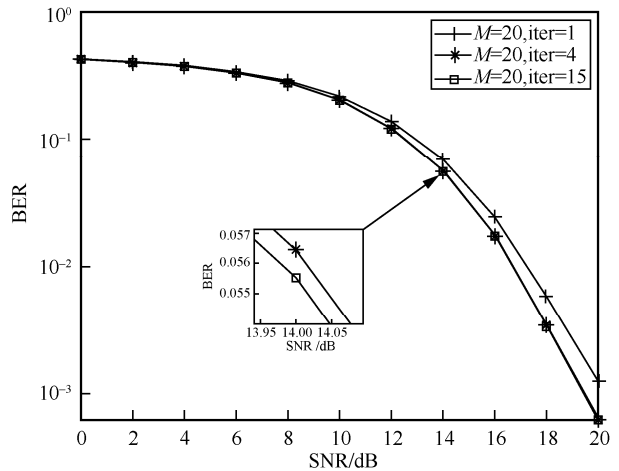


图 5 不同译码迭代次数下 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作系统 BER 性能

### 4.3 RIS 辅助的编码中继协作系统中断概率性能

本节研究 RIS 辅助的编码中继协作系统的中断概率性能。其中，RIS 辅助的编码中继协作系统的等效码率  $r = \frac{1}{3}$ ，反射单元数量  $M$  为 12、20。

图 6 比较了 RIS 辅助的编码中继协作系统在 RIS 反射单元数量不同时中断概率的理论值和仿真值。从图 6 可以看出，中断概率理论分析值与仿真结果吻合，并且系统中断概率随着  $M$  增大而降低。当  $\text{SNR} = 18 \text{ dB}$  时， $M = 12$  的中断概率约为  $6.3 \times 10^{-2}$ ，而  $M = 20$  的中断概率降至约  $4.3 \times 10^{-5}$ 。

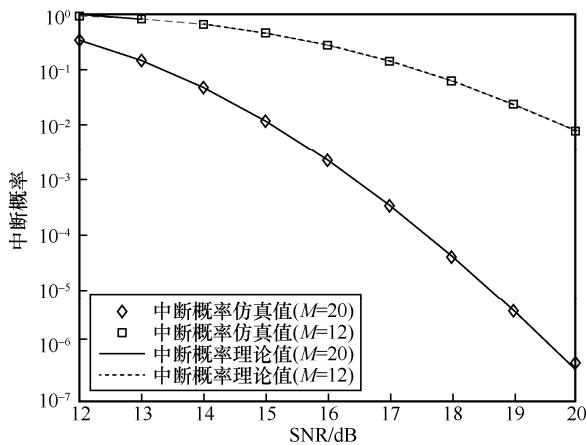


图 6 RIS 辅助的编码中继协作系统在 RIS 反射单元数量不同时中断概率的理论值和仿真值

### 4.4 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量

本节研究 RIS 辅助的编码中继协作系统在有限码长情况下的信道容量，并进一步比较 RIS 反射单元数量对信道容量影响。其中，反射单元数量  $M$  为 18、30，误码率  $\varepsilon = 10^{-3}$ ，总码长为  $n = n_1 + n_2 = 512 + 256 = 768$ 。

图 7 比较了 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量。从图 7 可以看出，有限码长信道容量略小于理想信道容量，反映出实际码长对信道容量的影响。仿真结果同时表明，RIS 反射单元数量越多，有限码长信道容量也越大。当  $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$  时，若反射单元数量由 18 增大到 30，有限码长信道容量由  $11.1 \text{ bit}/(\text{s} \cdot \text{Hz})$  上升至  $12.2 \text{ bit}/(\text{s} \cdot \text{Hz})$ 。这是因为 RIS 反射单元数量越多，给系统提供的辅助链路越多，系统能获得的空间分集增益越高。

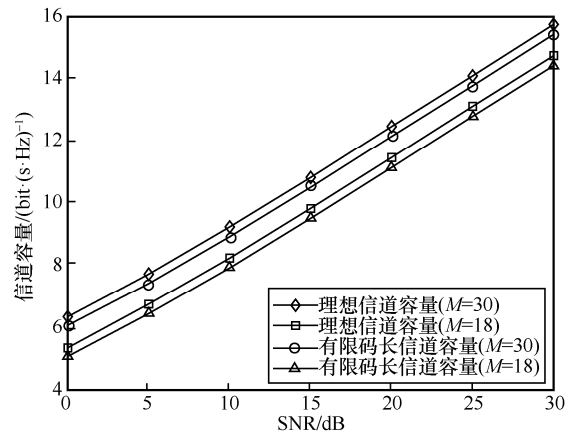


图 7 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量

### 4.5 不同码长下 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量

本节研究码长对 RIS 辅助的编码中继协作系统信道容量的影响，并与理想信道容量比较。其中，反射单元数量  $M$  为 18、30， $\varepsilon = 10^{-3}$ ， $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ 。

不同码长下 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量如图 8 所示。从图 8 可以看出，随着码长不断增加，RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量也逐渐逼近理想信道容量。当  $M = 30$  时，码长  $n = 200$  的有限码长信道容量与理想信道容量差值约为  $0.44 \text{ bit}/(\text{s} \cdot \text{Hz})$ ，码长  $n = 2000$  的有限码长信道容量与理想信道容量差值降至约为  $0.13 \text{ bit}/(\text{s} \cdot \text{Hz})$ 。这是因为理想信道容量是在码长无限的情况下得到的，随着码长不断增加，有限码长信道容量更加逼近理想信道容量。

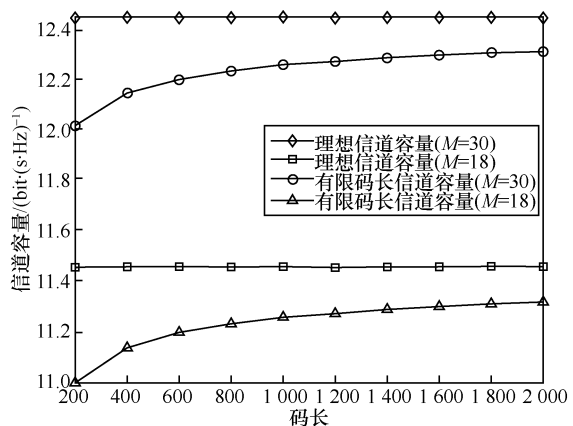


图 8 不同码长下 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量

### 4.6 不同误码率下 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量

本节研究误码率对 RIS 辅助的编码中继协作

系统有限码长信道容量的影响,并与理想信道容量对比。其中,反射单元数量  $M$  为 18、30,  $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ , 码长为 768。

不同 BER 下 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量如图 9 所示。从图 9 可以看出,随着 BER 增加,所提系统有限码长信道容量逐渐增大,并越来越趋近于理想信道容量。当  $M = 18$  时,  $\varepsilon = 10^{-6}$  的有限码长信道容量与理想信道容量差值约为  $0.35 \text{ bit}/(\text{s}\cdot\text{Hz})$ ,  $\varepsilon = 10^{-1}$  的有限码长信道容量与理想信道容量差值降至约  $0.09 \text{ bit}/(\text{s}\cdot\text{Hz})$ 。这是因为通信系统的可靠性和有效性是一对矛盾体,在容许更高错误概率时,能获得更大的信道容量;反之,错误概率降低时,信道容量随之减小。

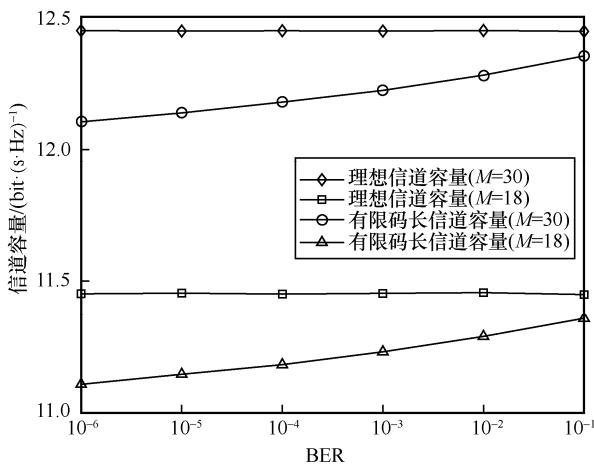


图 9 不同 BER 下 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量

#### 4.7 反射单元数量对系统有限码长信道容量影响

本节研究 RIS 反射单元数量  $M$  对 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量的影响,并与理想信道容量对比。其中,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ , 码长为 768。

不同反射单元数量下 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量如图 10 所示。从图 10 可以看出,随着  $M$  增大,所提系统有限码长信道容量与理想信道容量均逐渐增大,且所提系统信道容量与反射单元数量  $M^2$  成对数关系,验证了理论分析结果的正确性。当反射单元数量由 20 分别增加到 40、60、80 时,有限码长信道容量由  $11.3 \text{ bit}/(\text{s}\cdot\text{Hz})$  分别提升至  $12.7 \text{ bit}/(\text{s}\cdot\text{Hz})$ 、 $13.5 \text{ bit}/(\text{s}\cdot\text{Hz})$ 、 $14.0 \text{ bit}/(\text{s}\cdot\text{Hz})$ 。这是因为 RIS 反射单元数量越多,为 S-I-D 信道提供的反射链路越多,故系统有限码长信道容量越大。

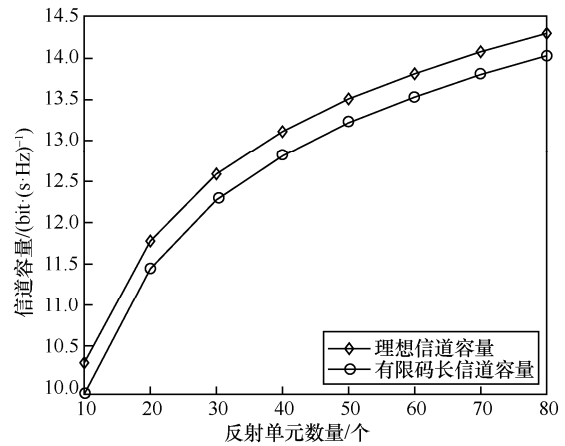


图 10 不同反射单元数量下 RIS 辅助的编码中继协作系统有限码长信道容量和理想信道容量

## 5 结束语

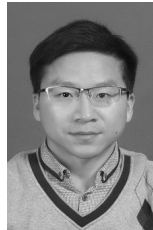
在传统中继协作系统的基础上,本文结合 RIS 技术,建立了 RIS 辅助的 LDPC 乘积码编码中继协作模型,提出了高效的 LDPC 乘积码联合迭代译码算法,进一步通过理论分析推导出系统的中断概率和给定码长信道容量闭合解,并进行了仿真验证,从误码率、中断概率、信道容量等多个维度验证了所提系统性能的优越性。结果表明,当 RIS 反射单元达到一定数量时,所提系统性能明显优于传统中继协作系统,而且随着 RIS 反射单元数量增加,优势变得更明显;同时,随着 LDPC 乘积码码长增加,所提系统的有限码长信道容量也逐渐逼近理想信道容量。如何对所提系统采用的 LDPC 乘积码进行设计,在不增加编译码复杂度的条件下进一步提升系统获得的编码增益,将是接下来的研究方向之一。

### 参考文献:

- [1] BASAR E, RENZO M D, ROSNY J D, et al. Wireless communications through reconfigurable intelligent surfaces[J]. IEEE Access, 2019, 7: 116753-116773.
- [2] BOULOGORGOS A A A, ALEXIOU A. Performance analysis of reconfigurable intelligent surface-assisted wireless systems and comparison with relaying[J]. IEEE Access, 2020, 8: 94463-94483.
- [3] YANG L, YANG Y, HASNA M O, et al. Coverage, probability of SNR gain, and DOR analysis of RIS-aided communication systems[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2020, 9(8): 1268-1272.
- [4] ZENG S H, ZHANG H L, DI B Y, et al. Reconfigurable intelligent surface (RIS) assisted wireless coverage extension: ris orientation and location optimization[J]. IEEE Communications Letters, 2021, 25(1): 269-273.
- [5] LABGHOUGH S, AYOUB F, EL BOUANANI F, et al. Mixed RF/FSO SWIPT-based OSLMD coded AF cooperative communication system: performance analysis[J]. IEEE Transactions on Green Communications and Networking, 2023, 7(1): 84-100.

- [6] 李陶深, 施安妮, 王哲, 等. 基于 SWIPT 的吞吐量最优化 NOMA 全双工中继选择策略[J]. 通信学报, 2021, 42(5): 87-97.  
LI T S, SHI A N, WANG Z, et al. Optimal relay selection for full duplex SWIPT-NOMA systems with maximal throughput[J]. Journal on Communications, 2021, 42(5): 87-97.
- [7] BAO J R, QI K L, LIU C, et al. Polar-coded cooperation with optimized relay selection in multi-satellite and wireless integrated systems[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2023, 10(23): 20429-20441.
- [8] HUANG C W, ZAPPONE A, ALEXANDROPOULOS G C, et al. Reconfigurable intelligent surfaces for energy efficiency in wireless communication[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2019, 18(8): 4157-4170.
- [9] BJÖRNSON E, ÖZDOĞAN Ö, LARSSON E G. Intelligent reflecting surface versus decode-and-forward: how large surfaces are needed to beat relaying[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2020, 9(2): 244-248.
- [10] ABDULLAH Z, CHEN G J, LAMBOTHARAN S, et al. A hybrid relay and intelligent reflecting surface network and its ergodic performance analysis[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2020, 9(10): 1653-1657.
- [11] TAO Y, LI Q, GE X H. Sum rate optimization for IRS-aided two-way AF relay systems[C]//Proceedings of IEEE/CIC International Conference on Communications in China. Piscataway: IEEE Press, 2021: 823-828.
- [12] ZHANG S W, HUANG X B, SONG R F. Joint optimization of phase shift matrices and trajectory for AF relay-based cooperation communication with RIS-enabled UAV system[J]. IEEE Systems Journal, 2023, 17(3): 4703-4714.
- [13] SONG L L, ZHANG S W. Robust energy-efficient RIS-aided multi-antenna DF relay cooperative MIMO[C]//Proceedings of IEEE Global Communications Conference. Piscataway: IEEE Press, 2023: 3344-3349.
- [14] ARORA K, SINGH J, RANDHAWA Y S. A survey on channel coding techniques for 5G wireless networks[J]. Telecommunication Systems, 2020, 73(4): 637-663.
- [15] HU Y K, WANG P, LIN Z H, et al. Performance analysis of reconfigurable intelligent surface assisted wireless system with low-density parity-check code[J]. IEEE Communications Letters, 2021, 25(9): 2879-2883.
- [16] JEONG S, LEE J. Iterative LDPC-LDPC product code for bit patterned media[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2017, 53(3): 1-4.
- [17] CHEN W G, WANG T, HAN C, et al. Erasure-correction-enhanced iterative decoding for LDPC-RS product codes[J]. China Communications, 2021, 18(1): 49-60.
- [18] MA X, WANG Q F, CAI S H, et al. Implicit partial product-LDPC codes using free-ride coding[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Communications. Piscataway: IEEE Press, 2022: 2471-2476.
- [19] WANG Y C, WANG Q F, MA X. Design of implicit partial product-LDPC codes and low complexity decoding algorithm[J]. IEEE Communications Letters, 2023, 27(2): 419-423.
- [20] ZHANG S W, YANG F F, TANG L. Network-coding-based multi-source multirelay LDPC-coded cooperative MIMO[J]. Transactions on Emerging Telecommunications Technologies, 2015, 26(3): 491-502.
- [21] POLYANSKIY Y, POOR H V, VERDU S. Channel coding rate in the finite blocklength regime[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(5): 2307-2359.
- [22] POLYANSKIY Y, VERDÚ S. Scalar coherent fading channel: dispersion analysis[C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings. Piscataway: IEEE Press, 2011: 2959-2963.
- [23] BAO J R, JIANG B, LIU C. Optimized construction of protograph G-LDPC codes by modified EXIT chart and MACE for new-generation wireless communications[J]. IEEE Access, 2018, 6: 58139-58153.

## [作者简介]



张顺外 (1987- ), 男, 江西九江人, 博士, 南京邮电大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为高效信道编码技术、协同通信技术、智能超表面辅助通信等。



王金 (1997- ), 男, 江苏镇江人, 南京邮电大学硕士生, 主要研究方向为 LDPC 码与智能超表面辅助通信。